შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

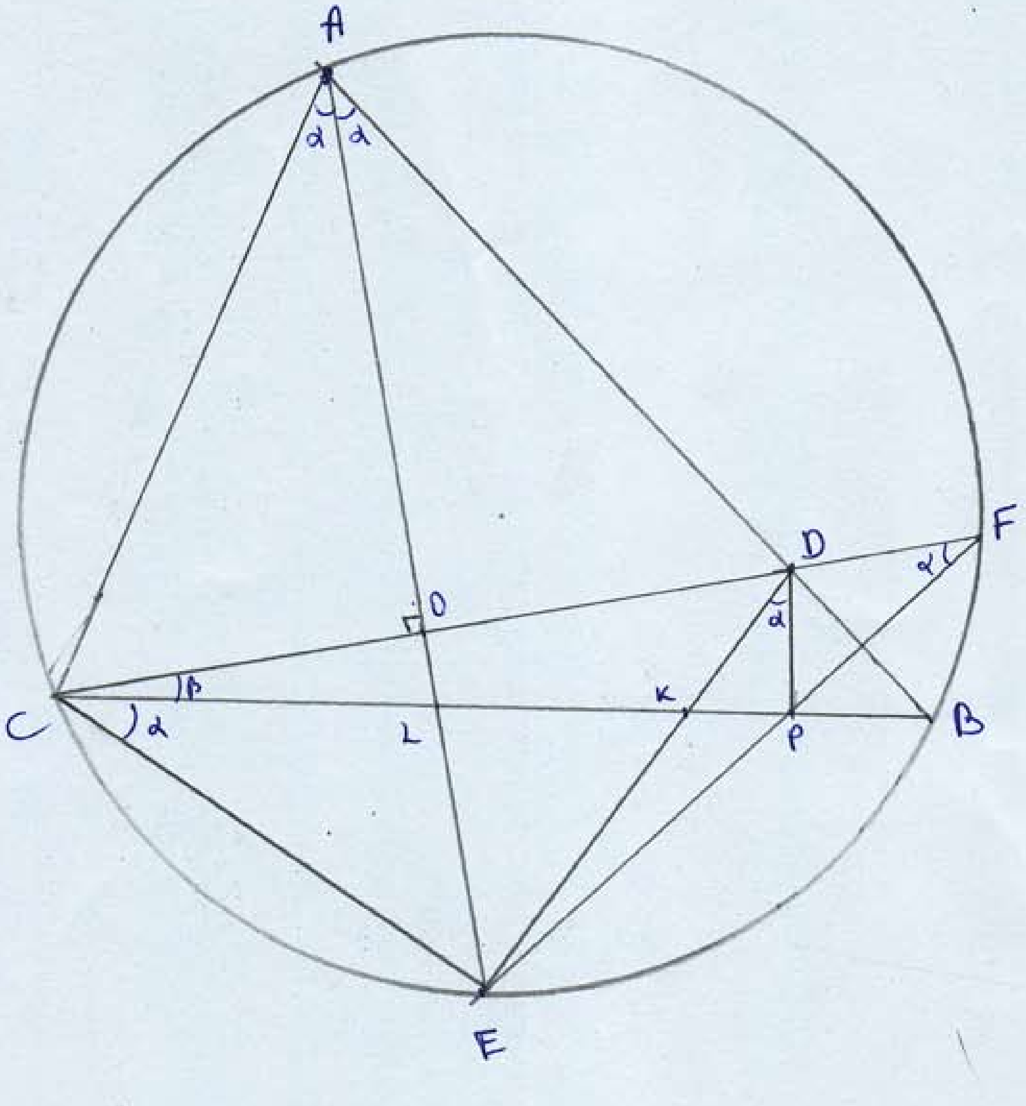
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 355

ამოცანა № 4

გვერდი № 1



~~CE~~ $\angle ECB=\angle EAB=\angle EAC=\angle EFC \Rightarrow \Delta ECP \sim \Delta EFC \Rightarrow$
$\Rightarrow EC^2=EP\cdot EF$ რადგან $AC=AD$ და AO ბისექტრისაა გამოდის რომ AO მედიანაცაა და სიმაღლეც ანუ $CO=OD$ $\angle COE=\angle EOD=90^\circ$ ანუ $\Delta CEO=\Delta DEO$ EO საერთო აქვთ. $\Rightarrow CE=ED$ ანუ

$ED^2=EP\cdot EF$ ეს კი ნიშნავს რომ ED არის PDF-ზე შემოხაზული წრეწირის მხები საიდანაც ვასკვნით რომ $\angle EDP=\angle CFE$.
ავღნიშნოთ კუთხეები α, და β-ი სადაც $\angle CAE=\alpha$ და $\angle DCB=\beta$
შესაბამისად $\angle ECB=\angle EDP=\angle CFP=\alpha$ რადგან $\angle ECB=\angle EDP \Rightarrow$
CDPE ოთხკუთხედი ჩაწერადია ანუ $\angle DCP=\angle DEP=\beta$
დავწეროთ სინუსების თეორემა ΔEDF-ში $\frac{DF}{\sin\beta}=\frac{EF}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow$

$\Rightarrow EF=\frac{DF\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ პირობის თანახმად $DK\cdot EF=AC\cdot DF$

$DK\cdot EF=DK\cdot DF\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=AC\cdot DF \Rightarrow AC=DK\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$

ახლა დავთვალოთ CK ΔCDK-ში სინუსების თეორემით.

$\frac{DK}{\sin\beta}=\frac{CK}{\sin\angle CDK}$ $\angle CDK=\angle ECD=\alpha+\beta$ რადგან $CE=ED$

ანუ $CK=\frac{DK\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$

საიდანაც $\frac{AC}{CK}=\frac{DK\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}{DK\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}=1$ ანუ $AC=CK$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

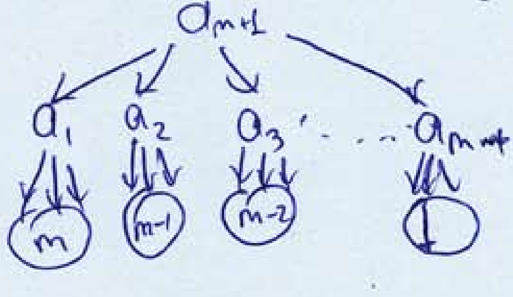
მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 355

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

განვიხილოთ ჩოგბურთის m-ეული. ვთქვათ ამ m-ეულს მოუგო a_1-მა. გადავაგდოთ ეს ეული და ~~[illegible]~~ მის ადგილზე ჩავსვათ a_1 და სხვა $m-1$ მოთამაშე. ვთქვათ ამ მოუგო a_2-მა ასევე ახალი a_2-ი ვერ იქნება გადაგდებულებს შორის რადგან a_1 გადაგდებულთაგან ყველა მოუგო. ~~[illegible]~~ გადავაგდოთ ~~[illegible]~~ $m-1$ მოთამაშე მის ადგილზე ჩავსვათ a_2 და სხვა $m-2$ მოთამაშე და ასე შემდეგ მივიღებთ შემდეგ სქემას



$A \to B$ ნიშნავს რომ ~~[illegible]~~ A-მ მოუგო B. სულ მივიღეთ $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ მოთამაშე

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	29.04.2012/ მათ/ IV/ 355

ამოცანა № 6 გვერდი № 1

$P(x)=(x+d_1)(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_9)$

ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ რომ $d_1>d_2>\ldots>d_9$

ანუ $\max\{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_9\}=d_1$ თუ დავამტკიცებთ რომ

თითოეულ $m+d_i$ აქვს სხვა დანარჩენ მამრავლთან ერთი მაინც

განსხვავებული მარტივი გამყოფი გამოვა რომ $P(m)$-ს ეყოლება

მინიმუმ 9 მარტივი გამყოფი რაც იმას ნიშნავს რომ ერთი

მაინც იქნება 20-ზე მეტი რადგან მარტივი რიცხვი რომ 23.

დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ რომელიმე $m+d_k$ და

$m+d_t$-ს [illegible] განსხვავებული მარტივი გამყოფი არ

აქვთ ~~[illegible]~~ ვთქვათ $d_k>d_t$

m- მაშინ $m+d_k>m+d_t$ ~~$m+d_k$ $(m+d_t)$~~

განვიხილოთ უ.ს.გ$(m+d_k; m+d_t)$ = უ.ს.გ$(m+d_k; d_k-d_t)$

$d_k-d_t<d_1$ ანუ უ.ს.გ$(m+d_k; d_k-d_t)<d_1$

~~[illegible]~~ ხოლო $m+d_k$ და $m+d_t$-ს ყველა მარტივი გამყოფი

აქვთ მაშინ მათი ნამრავლი იქნება d_1-ზე ხოლო მათ

მამრავლი უნდა უ.ს.გ.$(m+d_k; d_k-d_t)$ განვიხილოთ ეხლა

~~[illegible]~~ როცა $m+d_k$-ს აქვს n ცალი მარტივი გამყოფი

ხოლო $m+d_t$-ს n ცალი მარტივი გამყოფი ექნება.

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 355

ამოცანა № 6

გვერდი № 2

~~ვთქვათ~~ $n<9$ რადგან თუ $n\geq 9$ მაშინ განვიხილოთ ხოლ 20-ზე მეტი მარტივი გამყოფი რომ $P(m)$-ს ~~[illegible]~~ რადგან ეს მარტივი რიცხვი 23-ია. ~~[illegible]~~ 20-ზე მეტი მარტივი გამყოფი თუ არ [illegible] [illegible] [illegible] განვიხილოთ [illegible], $n\leq 8$

$n=1$ [illegible] ცხადია $უ.ს.გ(m+d_k; m+d_t) = m+d_t$ რადგან $m+d_k = p_1^{\alpha_1}$ $m+d_t = p_1^{\alpha_2}$ $\alpha_1 > \alpha_2$ რადგან $m+d_k > m+d_t$ $m+d_k \vdots m+d_t$ რადგან $p_1^{\alpha_1} \vdots p_1^{\alpha_2}$ ~~[illegible]~~ [illegible] $m+d_t > d_1$ რადგან $m > d_1^8$.

$m+d_k = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ $m+d_t = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$ ცხადია

$უ.ს.გ.(m+d_k; m+d_t) = p_1^{\min(\alpha_1;\beta_1)}\cdot p_2^{\min(\alpha_2;\beta_2)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\min(\alpha_n;\beta_n)} < d_1$

~~$m+d_k$~~ ~~$m+d_t > d_1^8$~~ $m+d_t > d_1^8 > p_1^{8\cdot\min(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\min(\alpha_n;\beta_n)}$